

Федеральное государственное образовательное бюджетное учреждение
высшего образования
**«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**
(Финансовый университет)

**Кафедра математики и анализа данных
Факультет информационных технологий и анализа больших данных**

Документ подписан усиленной неквалифицированной электронной подписью
Организация: Финансовый университет при Правительстве РФ
Утверждено: Проректор по учебной и методической работе Е.А. Каменева
Сертификат: 7PdUQLVI2ahQSKLXmtRoS+foMkMkAweU
Дата: 03.10.2025 г.

В.С. Чернышенко, Э.А. Окунева

Численные методы

Рабочая программа дисциплины

для студентов, обучающихся по направлению подготовки:
01.03.02 - Прикладная математика и информатика,
Образовательная программа «Прикладное машинное обучение»
Профиль:
«Прикладное машинное обучение»

Рекомендовано

*Факультет информационных технологий и анализа больших данных
(протокол № 03 от 16.12.2025 г.)*

Одобрено

*Кафедра математики и анализа данных
(протокол № 15 от 27.10.2025 г.)*

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Наименование дисциплины	3
2.	Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине	3
3.	Место дисциплины в структуре образовательной программы	4
4.	Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся	4
5.	Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий	5
5.1.	Содержание дисциплины	5
5.2.	Учебно-тематический план	8
5.3.	Содержание семинаров	9
6.	Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине	12
6.1.	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы	12
6.2.	Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю	14
7.	Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине	16
8.	Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины	21
9.	Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины	21
10.	Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины	23
11.	Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем	25
12.	Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине	26

1. Наименование дисциплины

«Численные методы».

2. Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине

Код компетенции	Наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции	Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции
ПKN-1	Способен собирать, анализировать и систематизировать данные современных научных исследований в области прикладной математики и информатики, требуемых для формирования заключений по соответствующим научным исследованиям	1. Работает с источниками информации, выбирает и оценивает применимость полученной информации для решения поставленных научно-исследовательских задач.	знать: Основы теории множеств, комбинаторики, математической логики, теории вероятностей и математической статистики. уметь: Решать типовые задачи из указанных разделов математики.
		2. Отбирает для решения исследовательской задачи математические методы и модели, осуществляет проверку адекватности моделей, анализ и интерпретацию результатов.	знать: Системы программирования, позволяющих решать математические задачи. уметь: Реализовать решение математических задач средствами Python.

3. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Численные методы» относится к «Общефакультетскому (предпрофильному) циклу».

4. Объем дисциплины (модуля) в зачетных единицах и в академических часах с выделением объема аудиторной (лекции, семинары) и самостоятельной работы обучающихся

Очная форма обучения

Вид учебной работы по дисциплине	Всего (в з/е и часах)	Семестр 4 (в часах)
Общая трудоёмкость дисциплины	4/144	144
Контактная работа- Аудиторные занятия	50	50
Лекции	16	16
Семинары, практические занятия	34	34
Самостоятельная работа	94	94
Вид текущего контроля	Контрольная работа	Контрольная работа
Вид промежуточной аттестации	Зачет	Зачет

5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) дисциплины с указанием их объемов (в академических часах) и видов учебных занятий

5.1. Содержание дисциплины

Тема 1. Теория приближённых вычислений

Основные понятия теории погрешностей. Источники и классификация погрешностей: абсолютные, относительные, методические, инструментальные. Правила округления чисел и оценки погрешностей.

Представление целых и вещественных чисел в памяти компьютера: двоичное кодирование, разряды, мантисса, порядок, числа с плавающей точкой. Стандарт IEEE 754: одинарная и двойная точность, специальные значения (NaN, Inf). Суммирование по алгоритму Кахана для минимизации накопления ошибок. Реализация погрешностного анализа в Python с использованием библиотеки `math` и `pumpru` для моделирования округлений.

Тема 2. Сложность алгоритмов, нотация Big-O

Основные свойства алгоритмов: детерминизм, конечность, эффективность. Сложность задачи: вычислительная, временная, пространственная. Способы анализа времени выполнения алгоритмов в Python: профилирование с `timeit`, `cProfile`. Асимптотический анализ сложности: верхние и нижние оценки. Нотация Big-O, Big-Theta, Big-Omega. Основные классы сложности: константная, логарифмическая, линейная, квадратичная, экспоненциальная. Проблема оценки точной сложности: амортизированный анализ, worst-case vs average-case. Примеры анализа в Python для численных алгоритмов с использованием `pumpru`.

Тема 3. Численное решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

Алгебраические и трансцендентные уравнения. Прямые и итерационные методы решения уравнений. Задача отделения корней: анализ знаков, графики. Метод половинного деления (бисекции). Метод дихотомии. Метод простой функциональной итерации, условия сходимости (контрактивное отображение). Метод хорд (секущих), связь с функциональной итерацией, сходимость. Метод Вегстейна. Метод Ньютона (касательных), связь с итерацией, выбор начального приближения, квадратичная сходимость. Модифицированный метод Ньютона для кратных корней.

Общая постановка задачи решения систем нелинейных уравнений. Метод простых функциональных итераций для систем. Метод Зейделя (координатного спуска). Метод Ньютона для систем, якобиан, сходимость. Модифицированный метод Ньютона с аппроксимацией якобиана. Реализация методов в Python с `scipy.optimize` для нелинейных систем.

Тема 4. Методы интерполирования и экстраполяции функций

Основные понятия теории приближения функций: интерполяция, экстраполяция, аппроксимация. Глобальная и локальная интерполяция. Простейшие методы: ступенчатая и линейная интерполяция. Интерполяция полиномом Лагранжа, формула, погрешность (формула Рунге). Использование параметрического представления кривых: формы Эрмита; кривые Безье; кубические сплайны. Непрерывность интерполирующих функций при кусочной интерполяции. Квадратичная интерполяция, вычисление коэффициентов полинома второй степени. Интерполяция кубическим сплайном: граничные условия, матрица системы. Введение в билинейную интерполяцию, модели кригинга. Интерполяция k-сплайнами. Кубические сплайны: условия интерполяции, непрерывности производных для коэффициентов. Реализация в Python с `scipy.interpolate` для сплайнов и полиномов.

Тема 5. Численные методы линейной алгебры для матриц

Обзор современных методов для решения задач линейной алгебры на плотных матрицах в Python. Задача перемножения матриц, алгоритм Штрассена, сложность. Задача собственных значений: полная и частичная. Понятие полной, разреженной, нормальной, унитарной, эрмитовой, верхне-гессенберговой матриц. Понятия спектра, псевдоспектра, спектрального радиуса. Теорема Гершгорина. Задача Google PageRank как итерационный метод. Метод степенной итерации, обратная итерация, сходимость. Метод вращений (Якоби). Метод главных компонент (PCA). Отношение Рэлея. Матричное разложение: Шура, QR-разложение. QR-алгоритм: вывод из уравнения неподвижной точки, сходимость, сложность. Теорема о неявном QR-алгоритме. Зазоры и смещения: итерации Рэлея, смещение Уилкинсона. Отражения Хаусхолдера. Алгоритм сингулярного разложения (SVD) матриц. Реализация в Python для разложений и собственных значений.

Тема 6. Методы численного дифференцирования

Основные понятия численного дифференцирования: разностная функция, сетка, шаг, приближённое значение, точность, невязка. Общее и частное решения разностных уравнений. Двухточечные шаблоны: прямые и обратные разности, порядок точности. Трёхточечные шаблоны: центральная разность для равномерной и неравномерной сетки,

разложение Тейлора, порядок. Метод предиктора-корректора. Теорема Лакса-Рябенского-Филиппова об эквивалентности. Вопросы устойчивости: жёсткие и нежёсткие ОДУ, локальная/глобальная погрешности. Фазовый портрет систем ОДУ: пространство, траектории, особые точки (узлы, седла, фокусы). Примеры имитационных моделей ОДУ. Метод Эйлера: явная и неявная схемы. Метод Рунге-Кутты второго и четвёртого порядков. Методы Адамса-Башфорта и Адамса-Мултона. Численная устойчивость: порядок согласованности, достаточное условие, нуль-устойчивость, линеаризация, спектральный признак, сходимость. Введение в краевые задачи, функции Грина, детерминированный хаос, теорию бифуркаций, странные аттракторы. Реализация в Python с `scipy.integrate: odeint, solve_ivp` для ОДУ.

Тема 7. Ряды Фурье

Понятие сложного сигнала, введение в преобразования Фурье. Формы записи ряда Фурье: синусно-косинусная, вещественная, комплексная. Понятия: частота, амплитуда, временная/частотная области, основная гармоника, верхние гармоники, спектральные числа, фильтры, свёртка. Дискретное преобразование Фурье (DFT). Разложение функции в тригонометрический ряд, теоремы о сходимости (Дирихле). Быстрое преобразование Фурье (FFT): алгоритм Кули-Тьюки. Тригонометрические ряды для чётных и нечётных функций. Прямое и обратное преобразование Фурье. Правила перемножения рядов. Комплексная форма для 2π -периодических функций. Параметрические и непараметрические методы спектрального анализа.

Общая характеристика методов численного дифференцирования функций: шаблоны, погрешность через разложение в ряд Тейлора. Приближённое дифференцирование на основе интерполяционных формул. Оценка погрешности. Общая характеристика методов численного интегрирования: квадратурные формулы. Формулы Ньютона-Котеса. Формула трапеций, остаточный член. Формула Симпсона, погрешность. Формулы высших порядков. Общая формула трапеций, геометрический смысл. Общая формула Симпсона, интерпретация, погрешность. Квадратурные формулы Чебышева и Гаусса, остаточный член Гаусса. Реализация в Python с `scipy.fft: fft, ifft` для Фурье; `scipy.integrate.quad` для интегрирования.

5.2. Учебно-тематический план

№ п/п	Наименование тем(разделов) дисциплины	Трудоемкость в часах				
		Всего	Контактная работа - Аудиторная работа			Самостоя тельная работа
			Общая, в т.ч.:	Лекции	Семинары, практическ ие занятия	
1	Теория приближённых вычислений	5	3	1	2	2
2	Сложность алгоритмов, нотация Big-O	5	3	1	2	2
3	Численное решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений	28	10	2	8	18
4	Методы интерполирования и экстраполяции функций	26	8	2	6	18
5	Численные методы линейной алгебры для матриц	30	10	4	6	20
6	Методы численного дифференцирования	32	12	4	8	20
7	Ряды Фурье	18	4	2	2	14
	Итого	144	50	16	34	94

5.3. Содержание семинаров

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов для обсуждения на семинарах, практических занятиях	Формы проведения занятий
Теория приближённых вычислений	Классификация погрешностей: абсолютные, относительные, методические, инструментальные. Оценка погрешностей арифметических операций: сложение, умножение, возведение в степень. Представление чисел в ЭВМ: мантисса, порядок, стандарт IEEE 754, специальные значения (NaN, Inf). Алгоритм Кахана для суммирования: минимизация накопления ошибок округления. Обратная задача теории погрешностей: вычисление Δx по Δf . Усиление погрешностей при вычитании близких чисел: катастрофический рост относительной ошибки. Машинный эпсилон и потеря значимых цифр: методы минимизации. Оценка общей погрешности в цепочке вычислений.	Работа с текстом лекции, разбор вопросов по теме занятия. Изучение рекомендованных к занятию литературных источников. Подготовка к семинарским и практическим занятиям.
Сложность алгоритмов, нотация Big-O	Формальное определение Big-O: $f(n) \leq c g(n)$ для $n \geq n_0$. Свойства нотации: рефлексивность, транзитивность, правила суммы и произведения. Общие классы сложности: $O(1)$, $O(\log n)$, $O(n)$, $O(n \log n)$, $O(n^2)$. Сравнение Big-O, Big-Ω, Big-Θ: верхние, нижние и точные границы. Анализ времени выполнения: worst-case, average-case, амортизированный анализ. Примеры алгоритмов: линейный поиск $O(n)$, бинарный поиск $O(\log n)$, сортировка $O(n \log n)$. Графическое представление роста функций: таблицы runtime для различных n . Оценка пространственной сложности.	Работа с текстом лекции, разбор вопросов по теме занятия. Изучение рекомендованных к занятию литературных источников. Подготовка к семинарским и практическим занятиям.
Численное решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений	Отделение корней: анализ областей притяжения, использование графиков и интервального анализа для локализации корней, влияние на скорость сходимости. Оценка устойчивости: локальная и глобальная устойчивость, анализ погрешностей итераций, обусловленность якобиана для систем. Метод бисекции: сходимость, оценка итераций $\log((b-a)/\epsilon)$. Метод Ньютона: формула $x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k)$, квадратичная сходимость. Метод секущих: интерпретация, условия сходимости. Метод простой итерации: $x = \phi(x)$, Lipschitz-условие $ \phi'(x) < 1$. Для систем: метод Ньютона с якобианом, $Jy = -F$. Метод Бroyдена: квазиньютоновский апдейт матрицы, суперлинейная сходимость. Оценка погрешности: линейная,	Работа с текстом лекции, разбор вопросов по теме занятия. Изучение рекомендованных к занятию литературных источников. Подготовка к семинарским и практическим занятиям. Выполнение домашних заданий.

	квадратичная конвергенция, нормы векторов.	
Методы интерполирования и экстраполяции функций	Полиномиальная интерполяция (Лагранжа, Ньютона), сплайновая интерполяция (кубическая, В-сплайны), тригонометрическая интерполяция; сравнение глобальной и локальной аппроксимации. Формула Рунге для полиномов Лагранжа, оценка остаточного члена через производные, влияние осцилляций Чебышева. Методы Рунге-Кутты для ускорения сходимости, экстраполяция последовательностей и рядов, применение в численном интегрировании. Формы Эрмита, кривые Безье (алгоритм де Кастельжо), условия непрерывности C1 и C2.	Работа с текстом лекции, разбор вопросов по теме занятия. Изучение рекомендованных к занятию литературных источников. Подготовка к семинарским и практическим занятиям. Выполнение домашних заданий.
Численные методы линейной алгебры для матриц	Нормальные, эрмитовы матрицы; теорема Перрона-Фробениуса, спектральный радиус. Задача PageRank (степенной метод), умножение матриц (Штрассена), псевдоспектр и устойчивость. Метод вращений Якоби: диагонализация симметричных матриц; обнуление внедиагональных элементов. Метод главных компонент (PCA), итерации Рунге. Разложения матриц (QR, Шура, SVD), алгоритмы для собственных значений (QR со сдвигами, степенной метод). Отражения Хаусхолдера: конструкция рефлекторов $v = x - \ x\ e_1$, применение для триангуляризации в QR-разложении, обеспечение ортогональности. Numpy. linalg. qr с 'raw' режимом для рефлекторов, ручная имплементация Якоби и QR с сдвигами в scipy. linalg. Реализация в Python: np. linalg. inv для инверсии; linalg. lstsq для least squares; linalg. eig для собственных значений.	Работа с текстом лекции, разбор вопросов по теме занятия. Изучение рекомендованных к занятию литературных источников. Подготовка к семинарским и практическим занятиям. Выполнение домашних заданий.
Методы численного дифференцирования	Конечные разности: прямые, обратные, центральные; порядки точности через разложения Тейлора. Трёхточечные шаблоны для неравномерных сеток. Оценка погрешности. Метод Рунге-Кутты для ОДУ: явные и неявные методы. Жёсткие и нежёсткие ОДУ: спектральный радиус якобиана; области устойчивости. Локальная и глобальная погрешности: теорема Лакса эквивалентности; сходимость методов. Реализация в Python: np. gradient для массивов; scipy. misc. derivative для функций; сравнение с аналитическими производными. Ошибки округления: влияние машинного эпсилон; минимизация через оптимальный шаг h. Применения: фазовые портреты ОДУ; модели хаоса (аттракторы Лоренца).	Работа с текстом лекции, разбор вопросов по теме занятия. Изучение рекомендованных к занятию литературных источников. Подготовка к семинарским и практическим занятиям. Выполнение домашних заданий.

Ряды Фурье	Определение периодических функций; условия Дирихле для сходимости рядов Фурье; теоремы о разложении в тригонометрический ряд. Формы записи ряда Фурье: синусно-косинусная, комплексная. Разложение для чётных и нечётных функций; симметрия и упрощение коэффициентов. Сходимость рядов Фурье: точечная, равномерная. Дискретное преобразование Фурье (DFT): прямое и обратное; дискретизация сигналов. Быстрое преобразование Фурье (FFT): алгоритм Кули-Тьюки; сложность $O(N \log N)$. Спектральный анализ: амплитуда, фаза, частотная область; свёртка и фильтры. Численное вычисление коэффициентов: квадратурные формулы; погрешность интегрирования. Реализации в Python: <code>numpy.fft</code> для DFT; <code>scipy.fft</code> для сигналов; <code>sympy.fourier_series</code> для символьных разложений. Применения: анализ сигналов, обработка изображений; моделирование в Python с <code>matplotlib</code> для визуализации спектров.	Работа с текстом лекции, разбор вопросов по теме занятия. Изучение рекомендованных к занятию литературных источников. Подготовка к семинарским и практическим занятиям. Выполнение домашних заданий.
------------	--	---

6. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы обучающихся по дисциплине

6.1. Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение дисциплины, формы внеаудиторной самостоятельной работы

Наименование тем (разделов) дисциплины	Перечень вопросов, отводимых на самостоятельное освоение	Формы внеаудиторной самостоятельной работы
Теория приближённых вычислений	Процесс округления чисел. Проблема сходимости. Число верных знаков и погрешность. Интервальная арифметика для контроля погрешностей, предобусловливание для снижения числа обусловленности. Анализ примеров из научных статей, моделирование интервалов, реализация в Python (mpmath для высокой точности).	Работа с текстом лекции, разбор вопросов и заданий по теме занятия. Изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Сложность алгоритмов, нотация Big-O	NP-полнота задач, алгоритмы аппроксимации для NP-трудных проблем, пространственная сложность и trade-off.	Работа с текстом лекции, разбор вопросов и заданий по теме занятия. Изучение рекомендованных к занятию литературных источников.
Численное решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений	Модификации метода Ньютона. Итерационные методы для решения систем нелинейных уравнений. Квази-ньютоновские методы (Бройден), глобальная оптимизация, мультистартовые подходы. Сравнение методов на тестовых функциях.	Работа с учебной и справочной литературой по рекомендованным источникам. Подготовка к решению задач.
Методы интерполирования и экстраполяции функций	Точность интерполяции. Кусочная интерполяция. Радиальные базисные функции, ортогональные полиномы (Чебышёва). Применение методов интерполяции к данным с шумом, визуализация погрешностей, реализация в Python (scipy.interpolate, RBFInterpolator).	Работа с учебной и справочной литературой по рекомендованным источникам. Подготовка к решению задач.
Численные методы линейной алгебры для матриц	Итерационные методы для больших разреженных систем (GMRES), псевдоспектральный анализ. Решение крупных СЛАУ, анализ устойчивости, реализация в Python (scipy.sparse.linalg.gmres) для разреженных матриц.	Работа с учебной и справочной литературой по рекомендованным источникам. Подготовка к

		решению задач.
Методы численного дифференцирования	Автоматическое дифференцирование (forward/backward mode), симплектические интеграторы. Имплементация для симуляций, оценка точности, реализация в Python (torch. autograd для AD в ОДУ).	Работа с учебной и справочной литературой по рекомендованным источникам. Подготовка к решению задач.
Ряды Фурье	Вейвлет-преобразования как расширение, неравномерная FFT (NUFFT), многомерные Фурье-преобразования. Обработка неравномерных данных, реализация в Python (scipy. signal. cwt для вейвлетов).	Работа с учебной и справочной литературой по рекомендованным источникам. Подготовка к решению задач.

6.2. Перечень вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

1. Для данной матрицы определите с точностью $\xi = 0,001$ методом непосредственного разворачивания собственные значения и собственные векторы, отобразите их на комплексной плоскости:

$$\begin{pmatrix} 2,4 & 1 & 1,4 & 0,4 \\ 1 & 2,3 & 1,4 & 0,5 \\ 1,4 & 1,2 & 1 & 2,2 \\ 0,6 & 0,3 & 1,6 & 3,3 \end{pmatrix}$$

2. Найти приближенное решение задачи Коши (см. систему) на отрезке $[1; 6]$ с шагом $h = 0.01$ методом Эйлера. При $y_1(1) = 0.2$, $y_2(1) = -0.5$. Постройте соответствующий фазовый портрет.

$$\begin{cases} y_1'(x) = \frac{\cos(x+y_2^2)}{2} \\ y_2'(x) = \ln(x) \cdot \sin^3(x - y_1) \end{cases}$$

3. Вычислите производную функции $y(x)$ аналитически и численно с помощью метода центральной разности. Сравните результаты.

$$y(x) = e^x \cdot \sqrt{7x^2 + 3}$$

4. Методом Зейделя решить систему:

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 0,5x_2 + 2,4x_3 = 1,9 \\ 2,2x_1 + 9,1x_2 + 4,4x_3 = 9,7 \\ 1,3x_1 + 0,2x_2 + 5,8x_3 = 1,4 \end{cases}$$

5. Для данной матрицы определите с точностью $\xi = 0,001$ методом итераций (степенным методом) собственные значения и собственные векторы, отобразите их на комплексной плоскости. Для умножения матриц используйте алгоритм Штрассена:

$$\begin{pmatrix} 1,6 & 0,7 & 0,8 & 2,2 \\ 0,7 & 1,6 & 0,3 & 1,2 \\ 0,8 & 0,3 & 1,6 & 1,3 \\ 2,2 & 1,2 & 3,2 & 3,3 \end{pmatrix}$$

6. В финансовых расчётах часто суммируют множество малых платежей, где ошибки округления могут накапливаться. Рассмотрим массив из 106 платежей,

каждый равен 0.01. Теоретическая сумма: $106 \cdot 0.01 = 10000$. Реализуйте два способа вычисления суммы: обычное суммирование и суммирование по Кахану. Сравните результаты.

7. В экономике ищут точку безубыточности, где доходы равны расходам. Доходы компании: $R(x) = 50x - 0.5x^2$, расходы: $C(x) = 10x + 100$, где x – количество единиц товара. Найдите x , при котором $R(x) = C(x)$, используя метод бисекции с точностью 10^{-2} . Опишите основные преимущества и недостатки метода половинного деления.

8. В анализе данных требуется оценить температуру между измерениями. Даны точки: (0,15), (1,18), (2,22), (3,25) (время, температура в °C). Напишите функцию, реализующую линейную интерполяцию, позволяющую оценить температуру в моменты времени 0–3. Найдите температуру в момент $t = 1.5$.

9. В геометрии ищут точку пересечения окружности $x^2 + y^2 = 4$ и прямой $y = x + 1$. Найдите (x, y) методом Гаусса–Зейделя с точностью 10^{-3} .

10. В финансах оценивают волатильность опциона. Даны данные: (1, 0.20), (2, 0.22), (3, 0.25) (годы, волатильность). Найдите волатильность для 2.5 года кубической сплайн-интерполяцией.

7. Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

Перечень компетенций с указанием индикаторов их достижения в процессе освоения образовательной программы содержится в разделе 2. *Перечень планируемых результатов освоения образовательной программы (перечень компетенций) с указанием индикаторов их достижения и планируемых результатов обучения по дисциплине.*

Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки индикаторов достижения компетенций, умений и знаний

ПКН-1 Способен собирать, анализировать и систематизировать данные современных научных исследований в области прикладной математики и информатики, требуемых для формирования заключений по соответствующим научным исследованиям

1) 1. Работает с источниками информации, выбирает и оценивает применимость полученной информации для решения поставленных научно- исследовательских задач.

Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции

Знать: Основы теории множеств, комбинаторики, математической логики, теории вероятностей и математической статистики.

Уметь: Решать типовые задачи из указанных разделов математики.

Типовые контрольные задания

Задание 1.1. Функция $f(x)$ задана таблично:

x	0	1	2	6
y	-1	-3	3	11

Пользуясь интерполяционным многочленом Лагранжа, найти её значения в точке $x=4$.

Задание 1.2. Функцию, заданную таблицей:

x	0	1	2	6
y	-1	-3	3	11

аппроксимировать линейной функцией . Найти сумму квадратов отклонений (Вычисления удобно проводить в таблице). Вычислив выборочный коэффициент корреляции, оценить тесноту линейной связи.

2) 2. Отбирает для решения исследовательской задачи математические методы и модели, осуществляет проверку адекватности моделей, анализ и интерпретацию результатов.

Результаты обучения (умения и знания), соотнесенные с индикаторами достижения компетенции

Знать: Системы программирования, позволяющих решать математические задачи.

Уметь: Реализовать решение математических задач средствами Python.

Типовые контрольные задания

Задание 1. Реализовать алгоритм и программу вычисления заданного определенного интеграла по выбранному методу построить графики функций с масштабированием и визуализацией пределов и интервалов интегрирования. Методы решения: трапеций; Симпсона.

Задание 2. Написать программу для численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений явным методом Рунге— Кутта четвертого порядка. Продемонстрировать работоспособность этой программы при решении задачи Коши (построить график зависимости решения от t).

Примеры практико-ориентированных заданий

1. Определите относительную погрешность для значения $x = 5.67$ с абсолютной погрешностью $\Delta x = 0.02$:

1. 0.0035
2. 0.035
3. 0.35
4. 3.5

2. Выберите два варианта. Какие классы сложности относятся к полиномиальным в нотации Big-O:

1. $O(1)$
2. $O(n \log n)$
3. $O(2^n)$
4. $O(n^2)$

3. В методе Ньютона-Рафсона для решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$ формула итерации имеет вид:

1. $x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i)$

2. $x_{i+1} = (x_i + x_{i-1}) / 2$

3. $x_{i+1} = x_i * f(x_i)$

4. $x_{i+1} = f(x_i) + x_i$

4. Выберите два варианта ответа. Для $n+1$ точек данных уникальный интерполирующий полином имеет степень:

1. n

2. $n+1$

3. $n-1$

4. $2n$

5. В методе Гаусса для решения систем линейных уравнений матрица приводится к форме:

1. Диагональной

2. Верхнетреугольной

3. Нижнетреугольной

4. Ортогональной

6. Выберите два варианта. Центральная разность для численного дифференцирования имеет порядок точности:

1. $O(h)$

2. $O(h^2)$

3. $O(h^4)$

4. $O(1)$

7. Коэффициент a_0 в ряде Фурье для функции $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ вычисляется как:

1. $(1/\pi) \int f(x) dx$ от $-\pi$ до π
2. $(1/2\pi) \int f(x) dx$ от $-\pi$ до π
3. $\int f(x) \cos(nx) dx$ от $-\pi$ до π
4. $(1/\pi) \int f(x) \sin(nx) dx$ от $-\pi$ до π

8. Выберите два варианта. Для симметричных матриц метод Якоби используется для:

1. Нахождения собственных значений
2. Инверсии матрицы
3. Диагонализации
4. Умножения матриц

Примерные вопросы для подготовки к зачету

1. В экономике для нахождения равновесия в системе с двумя товарами решается система уравнений (см. ниже). Используя метод Ньютона в двумерном случае найдите решение системы. Объясните, как ошибка округления в арифметике с плавающей точкой может повлиять на сходимость метода Ньютона при решении нелинейного уравнения. Приведите пример функции, где это влияние особенно заметно.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

2. Реализуйте наивный алгоритм умножения двух квадратных матриц A и B . Какова асимптотическая сложность наивного алгоритма и алгоритма Штрассена для матриц $n \times n$? Как Штрассен уменьшает количество операций? Почему для малых n преимущество может быть незначительным? Как архитектура памяти влияет на производительность алгоритмов умножения матриц?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 0 \\ 3 & 7 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

3. В физике для моделирования гармонического осциллятора решается система ОДУ при $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ на $[0, 10]$ с шагом $h = 0.1$ методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Постройте фазовый портрет системы. Как фазовый портрет помогает анализировать динамические системы? Как численные методы могут искажать фазовый портрет из-за ошибок округления? Сравните явные и неявные методы численного интегрирования по устойчивости. Система ОДУ:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

Основная литература:

1. Пирумов, Ульян Гайкович Численные методы : учебник и практикум для вузов / У. Г. Пирумов [и др.] ; под редакцией У. Г. Пирумова. 5-е изд., пер. и доп Электрон. дан. Москва : Юрайт, 2023 421 с (Высшее образование) URL: <https://urait.ru/bcode/510769> (дата обращения: 08.04.2025). Режим доступа: Электронно-библиотечная система Юрайт, для авториз. пользователей <https://urait.ru/bcode/510769> ISBN 978-5-534-03141-6 : 1639.00. [БИК ID: RU2fURAIT2f510769]
2. Зенков, Андрей Вячеславович Численные методы : учебник для вузов / А. В. Зенков. 2-е изд., пер. и доп Электрон. дан. Москва : Юрайт, 2025 136 с (Высшее образование) URL: <https://urait.ru/bcode/562366> (дата обращения: 01.09.2025). Режим доступа: Электронно-библиотечная система Юрайт, для авториз. пользователей <https://urait.ru/bcode/562366> ISBN 978-5-534-16703-0 : 559.00. [БИК ID: RU2fURAIT2f562366]

Дополнительная литература:

1. Зализняк, Виктор Евгеньевич Численные методы. Основы научных вычислений : учебник и практикум для вузов / В. Е. Зализняк. 2-е изд., пер. и доп Электрон. дан. Москва : Юрайт, 2025 356 с (Высшее образование) URL: <https://urait.ru/bcode/559846> (дата обращения: 01.09.2025). Режим доступа: Электронно-библиотечная система Юрайт, для авториз. пользователей <https://urait.ru/bcode/559846> ISBN 978-5-534-02714-3 : 1409.00. [БИК ID: RU2fURAIT2f559846]

9. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

1. Личный кабинет обучающегося <https://org.fa.ru>
2. Электронная библиотека Финансового университета (ЭБ) <http://elib.fa.ru/> (<http://library.fa.ru/files/elibfa.pdf>)
3. Электронно-библиотечная система BOOK.RU <http://www.book.ru>
4. Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека ОНЛАЙН" <http://biblioclub.ru/>

5. •Электронно-библиотечная система Znanium <http://www.znanium.ru/>
6. Образовательная платформа "ЮРАЙТ" <https://urait.ru/>
7. •Электронно-библиотечная система издательства Проспект <http://ebs.prospekt.org/books>
8. Электронно-библиотечная система издательства "Лань" <https://e.lanbook.com/>
9. «Деловая онлайн библиотека» издательства «Альпина Паблишер» –<http://lib.alpinadigital.ru/en/library>
10. Научная электронная библиотека eLibrary.ru <http://elibrary.ru>
11. •Национальная электронная библиотека <http://нэб.рф/>
12. Электронная коллекция книг издательства Springer: Springer eBooks <http://link.springer.com/>

10. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Цель методических рекомендаций – обеспечить студенту бакалавриата (далее – студенту) оптимальную организацию процесса изучения дисциплины, а также выполнения различных форм самостоятельной работы.

Рекомендации по подготовке к лекционным занятиям:

1. При подготовке к лекции целесообразно предварительно познакомиться с ее содержанием по рекомендованным источникам и выделить наиболее трудные вопросы.
2. Во время лекций следует конспектировать содержание лекции.
3. После занятий следует провести работу с конспектом: отредактировать записи, оформить конспект.
4. При оформлении целесообразно выделять специальным образом названия тем и формулировки вопросов, основные определения, формулировки теорем и примеры.
5. Сделанные записи нужно сопоставить с учебниками и учебными пособиями и в случае расхождений проконсультироваться с преподавателем.
6. Перед очередной лекцией необходимо просмотреть по конспекту материал предыдущей лекции. При затруднениях в восприятии материала следует обратиться к основным литературным источникам, если разобраться в материале не удалось, то обратитесь к лектору (по графику его консультаций) или к преподавателю на практических занятиях. Не оставляйте «белых пятен» в освоении материала.

Рекомендации по подготовке к практическим (семинарским) занятиям:

Студентам следует:

1. Приносить с собой рекомендованную преподавателем литературу к конкретному занятию;
2. До очередного практического занятия по рекомендованным литературным источникам проработать теоретический материал, соответствующей темы занятия;
3. При подготовке к практическим занятиям следует обязательно использовать не только лекции, но и другую учебную литературу;
4. В начале занятий задать преподавателю вопросы по материалу, вызвавшему затруднения в его понимании и освоении, при решении задач, заданных для самостоятельного решения;

5. В ходе семинара давать конкретные, четкие ответы по существу вопросов;
6. На занятии доводить каждую задачу до окончательного решения, демонстрировать понимание проведенных расчетов (анализов, ситуаций), в случае затруднений обращаться к преподавателю.

Методические рекомендации по выполнению различных форм самостоятельных домашних заданий:

Самостоятельная работа студентов включает в себя выполнение различного рода заданий, которые ориентированы на более глубокое усвоение материала изучаемой дисциплины. К выполнению заданий для самостоятельной работы предъявляются следующие требования: задания должны выполняться самостоятельно и представляться в установленный срок, а также соответствовать установленным требованиям по оформлению.

Студентам следует:

1. Руководствоваться графиком самостоятельной работы, определенным РПД;
2. Выполнять все плановые задания, выдаваемые преподавателем для самостоятельного выполнения, и разбирать на семинарах и консультациях неясные вопросы;
3. Использовать при подготовке нормативные документы Финансового университета;
4. При подготовке к экзамену параллельно прорабатывать соответствующие теоретические и практические разделы дисциплины, фиксируя неясные моменты для их обсуждения на плановой консультации.

Методические рекомендации по работе с литературой:

Любая форма самостоятельной работы студента (подготовка к семинарскому занятию, выполнение расчетно-аналитической работы начинается с изучения соответствующей литературы как в библиотеке, так и дома.

К каждой теме учебной дисциплины подобрана основная и дополнительная литература.

При работе с литературой рекомендуется делать записи. Записи в той или иной форме не только способствуют пониманию и усвоению изучаемого материала, но и помогают вырабатывать навыки явного изложения в письменной форме тех или иных теоретических вопросов.

Методические указания по проведению практических занятий:

По структуре практические занятия следует разделить на учебные и контрольные.

Учебные практические занятия структурно состоят из следующих компонент:

1. Проверка наличия выполненного задания самостоятельной работы каждого студента;
2. Выборочная проверка корректности выполнения домашнего задания;
3. Разбор типичных ошибок, возникших в самостоятельной работе;
4. Рассмотрение теоретических вопросов, связанных с текущим практическим занятием;
5. Разбор методов выполнения практических заданий и решения задач;
6. Корректировка заданий для самостоятельной работы студентов.

Контрольные практические занятия структурно состоят из следующих компонент:

1. Проведение аудиторных самостоятельных работ;
2. Подведение итогов и разбор типичных ошибок, возникших при выполнении самостоятельных работ.

Студенты должны обратить внимание на перечень основных контрольных мероприятий, которые проводятся в соответствии с рабочей программой дисциплины.

Конкретные сроки проведения этих мероприятий своевременно доводятся до сведения студентов.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем

Комплект лицензионного программного обеспечения:

1. Kaspersky
2. Пакет офисных программ

Современные профессиональные базы данных и информационные справочные системы:

1. Система комплексного раскрытия информации «СКРИН» - <http://www.skrin.ru/>
2. Язык программирования Python 3. <https://pythonworld.ru/>

Сертифицированные программные и аппаратные средства защиты информации:

1. не предусмотрены

12. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине

1. **Компьютерный класс** для проведения учебных занятий, предусмотренных программой, в том числе групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенный оборудованием и техническими средствами обучения: мебель аудиторная (столы, стулья, доска аудиторная), персональные компьютеры, набор демонстрационного оборудования (проектор, экран)